KOMPLEKSNA ANALIZA

Pavle Pandžić, 8. predavanje

Prisjetimo se:

Red $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ konvergira ako redovi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ i $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}$ konvergiraju. U tom slučaju je $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n$.

Za realne brojeve r, R takve da je $0 \leq r < R \leq +\infty$, promatramo kružni vijenac

$$V = V(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Teorem (o Laurentovom razvoju). Neka je f holomorfna funkcija na kružnom vijencu $V = V(z_0, r, R)$. Tada je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in V.$$

Pri tome su koeficijenti a_n određeni sa

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

gje je γ bilo koja pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u z_0 radijusa $\rho \in (r, R)$.

Neka je $f \in H(V)$. Za $z \in V$ definiramo

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n; \qquad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Teorem (o karakterizaciji Laurentovog razvoja I). Neka je f holomorfna funkcija na kružnom vijencu $V = V(z_0, r, R)$. Tada vrijedi

1. Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergira prema f_2 lokalno uniformno na $K(z_0, R)$ i $f_2 \in H(K(z_0, R))$.
2. Red $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ konvergira prema f_1 lokalno uniformno na $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r)$ i $f_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r))$.
3. $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ za sve $z \in V$.
4. $\lim_{|z| \to \infty} f_1(z) = 0$.

Teorem (o karakterizaciji Laurentovog razvoja II). Neka je f holomorfna funkcija na kružnom vijencu $V = V(z_0, r, R)$. Neka su g_1 i g_2 funkcije za koje vrijedi

1. $g_2 \in H(K(z_0, R))$.
2. $g_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r))$.
3. $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ za sve $z \in V$.
4. $\lim_{|z| \to \infty} g_1(z) = 0$.

Tada je $g_1 = f_1$ i $g_2 = f_2$.

Gornji teorem povlači jedinstvenost koeficijenata Laurentovog razvoja.

Za $z_0 \in \mathbb{C}$ i za $0 < R \leq +\infty$, označimo sa $K^*(z_0, R)$ tzv. probušeni krug, $K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Uočite da je to poseban slučaj kružnog vijenca: $K^*(z_0, R) = V(z_0, 0, R)$.

Definicija. $z_0 \in \mathbb{C}$ je **(izolirani) singularitet** funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ako f nije holomorfna u z_0, ali postoji $R > 0$ tako da je $K^*(z_0, R) \subseteq \Omega$ i f holomorna na $K^*(z_0, R)$.

Ako je z_0 singularitet od f tada f ima Laurentov razvoj na $K^*(z_0, R)$

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots . \tag{1}$$

Ovisno o broju članova s negativnim potencijama u (1) singularitete dijelimo na uklonjive, polove i bitne singularitete.

Definicija. z_0 je **uklonjiv** singularitet od f ako $a_{-n} = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. u Laurentovom razvoju od f nema negativnih potencija.

Tada se f može dodefinirati ili predefinirati do holomorne funkcije na $K(z_0, R)$, a pritom mora biti $f(z_0) = a_0$.

Na primjer, $z_0 = 0$ je uklonjiv singularitet funkcije $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, jer je

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots .$$

Definicija. z_0 je **pol** funkcije f m-tog reda ($m \geq 1$) ako je $a_{-m} \neq 0$ i $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \ldots = 0$. Drgim riječima, z_0 je pol funkcije f ako postoji samo konačno (ali bar jedan) članova Laurentovog razvoja s negativnim potencijama.

Tada za $z \in K^*(z_0, R)$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \big(\underbrace{a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \ldots}_{=:g(z)} \big), \\ &= \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \end{aligned}$$

pri čemu je $g \in H(K(z_0, R))$ i $g(z_0) \neq 0$.

Vrijedi i obrat, tj. ako je $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ za neki $m \geq 1$, pri čemu je $g \in H(K(z_0, R))$ i $g(z_0) \neq 0$, tada f ima u z_0 pol m-tog reda. Na primjer, $f(z) = \frac{1}{z}$ ima pol prvog reda u $z_0 = 0$, a $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$ ima pol reda 3 u $z_0 = 2$.

Definicija. Funkcija f u z_0 ima **bitan** singularitet ako je $a_{-n} \neq 0$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$.

Na primjer, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ima bitan singularitet u 0, jer je

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!z^k}.$$

Teorem (karakterizacija singulariteta). Neka je $f \in H(K^*(z_0, R))$. Tada vrijedi:

1. z_0 je uklonjiv singularitet od $f \Leftrightarrow f$ ograničena na $K^*(z_0, r)$ za neki $r < R$.
2. z_0 je pol od $f \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.
3. z_0 je bitan singularitet od $f \Leftrightarrow$ za svaki $r < R$, skup $f(K^*(z_0, r))$ je gust u $\mathbb{C}$, tj. vrijedi $\overline{f(K^*(z_0, r))} = \mathbb{C}$. (Casorati-Weierstrassov teorem)

Dokaz. (1) ($\Rightarrow$) Ako je z_0 uklonjiv, tada f dodefiniramo u z_0 i dobijemo holomorfnu funkciju na $K(z_0, R)$. Za svaki $r < R$ je f ograničena na $\overline{K(z_0, r)}$ (kao neprekidna funkcija na kompaktu), a onda i na $K^*(z_0, r)$.

(1) ($\Leftarrow$) Pretpostavimo da za neki $r < R$ postoji $M \geq 0$ takav da je

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in K^*(z_0, r).$$

Neka je $\rho < r$ i $\gamma = S(z_0, \rho)$ pozitivno orijentirana kružnica. Za sve $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \right| \leq$$
$$\frac{\ell(\gamma)}{2\pi} \max_{w \in \gamma} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} \leq \frac{2\rho\pi \cdot M}{2\pi \cdot \rho^{n+1}} = M\rho^{-n}.$$

Posebno, $|a_{-n}| \leq M\rho^n$ za sve $n \geq 1$ i sve $\rho < r$. Zbog $\lim_{\rho \to 0} M\rho^n = 0, \forall n \geq 1$, slijedi $a_{-n} = 0$ za sve $n \geq 1$. To povlači da f ima uklonjiv singularitet u z_0.

(2) ($\Rightarrow$) Ako je z_0 pol reda $m \geq 1$ tada postoji $g \in H(K(z_0, R)), g(z_0) \neq 0$, tako da je

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Tada

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = \infty.$$

(2) ($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Za $\varepsilon = 1$ postoji $r \in \langle 0, R \rangle$ tako da je $|f(z)| > 1$ za sve $z \in K^*(z_0, r)$. Tada je funkcija

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

dobro definirana i holomorfna na $K^*(z_0, r)$. Nadalje, $g(z) \neq 0$, $\forall z \in K^*(z_0, r)$.

Kako je

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < 1, \quad \forall z \in K^*(z_0, r),$$

tvrdnja (1) povlači da g ima uklonjiv singularitet u z_0.

Dodefiniramo g u z_0; tada je

$$|g(z_0)| = \lim_{z \to z_0} |g(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0.$$

Dakle, $g(z_0) = 0$.

Sada je $g \in H(K(z_0, r))$, a z_0 je njena izolirana nultočka (jer $g(z) \neq 0$ za $z \in K^*(z_0, r)$), pa mora biti konačnog reda $m \geq 1$.

Tada je $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, gdje je h holomorna na $K(z_0, r')$ za neki $r' < r$ i $h(z) \neq 0$ za $z \in K(z_0, r')$. Slijedi da je

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{\frac{1}{h(z)}}{(z - z_0)^m}.$$

Još uočimo da je $G(z) := \frac{1}{h(z)}$ holomorfna na $K(z_0, r')$ i $G(z_0) \neq 0$, pa slijedi da f u z_0 ima pol m-tog reda.

(3) ($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno, tj. z_0 je bitan singularitet, ali postoji $r < R$ tako da $f(K^*(z_0, r))$ nije gust u $\mathbb{C}$.

To znači da postoji $w \in \mathbb{C}$ i postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $|w - f(z)| > \varepsilon$ za sve $z \in K^*(z_0, r)$.

Fiksirajmo taj w i taj ε. Definiramo funkciju

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}; \qquad z \in K^*(z_0, r).$$

Tada je g holomorfna na $K^*(z_0, r)$ i vrijedi $g(z) \neq 0$, $\forall z \in K^*(z_0, r)$. Nadalje,

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} < \frac{1}{\varepsilon}, \quad z \in K^*(z_0, r).$$

Dakle, prema (1), g ima uklonjiv singularitet u z_0.

Dodefiniramo g u z_0. Vrijedi

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}, \quad z \in K^*(z_0, r).$$

Ako $g(z_0) \neq 0$ tada f ima uklonjiv singularitet u z_0 - kontradikcija s pretpostavkom.

Ako $g(z_0) = 0$ tada f ima pol u z_0 (kao u dokazu (2) ($\Leftarrow$), jer $g(z) \neq 0$ za $z \in K^*(z_0, r)$). Opet kontradikcija s pretpostavkom.

(3) ($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $f(K^*(z_0, r))$ gust u $\mathbb{C}$ za sve $r < R$.

Ako bi u z_0 bio uklonjiv singularitet od f, tada bi po (1) f bila ograničena funkcija na $K^*(z_0, r)$ za neki $r < R$.

Tada bi postojao $M \geq 0$ tako da je $|f(z)| \leq M$ za sve $z \in K^*(z_0, r)$. Ali tada $f(K^*(z_0, r)) \subseteq K(0, M)$, pa $f(K^*(z_0, r))$ ne bi bio gust u $\mathbb{C}$. Kontradikcija s pretpostavkom.

Ako bi u z_0 bio pol, tada bi po (2) vrijedilo $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, pa bi za npr. $\varepsilon = 1$ postojao r takav da je $|f(z)| > 1$ za $z \in K^*(z_0, r)$. Slijedilo bi da je $f(K^*(z_0, r)) \subseteq \mathbb{C} \setminus K(0, 1)$, pa opet $f(K^*(z_0, r))$ ne bi bio gust u $\mathbb{C}$. Kontradikcija s pretpostavkom.

Zaključujemo da je z_0 bitan singularitet funcije f. □

Neka je f holomorfna na $K^*(z_0, R)$. Tada je prema Teoremu o Laurentovom razvoju

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K^*(z_0, R),$$

pri čemu je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z},$$

gdje je γ pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa $\rho < R$.

Definicija. Reziduum funkcije f u z_0 je

$$\text{res}\,(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) dw.$$

Očito je $\text{res}(f, z_0) = 0$ ako je $f \in H(K(z_0, R))$ ili ako f ima uklonjiv singularitet u z_0.

Neka je γ po dijelovima gladak zatvoren put u C i neka $z \in \mathbb{C}$ nije u slici od γ. Tada definiramo **indeks krivulje γ s obzirom na** z kao

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

$\nu(\gamma, z)$ je uvijek cijeli broj. Intuitivno, to je broj obilazaka puta γ oko z u pozitivnom smjeru.

Pretpostavimo da je γ kontura, odnosno PDG zatvoren put koji sam sebe ne presijeca. Drugim riječima, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ je PDG put, koji je zatvoren ($\gamma(a) = \gamma(b)$), i vrijedi da je $\gamma|_{[a,b\rangle}$ injekcija.

Prema Jordanovom teoremu, $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ je unija dva područja od kojih je jedno ograničeno (unutrašnje područje) a drugo neograničeno (vanjsko područje).

Indeks konture γ u odnosu na z je dan sa

$$\nu(\gamma, z) = \begin{cases} 1, & z \text{ unutar } \gamma; \\ 0, & z \text{ izvan } \gamma. \end{cases}$$

Teorem o reziduumima. Neka je Ω otvoren i zvjezdast skup, $z_1, \ldots, z_k \in \Omega$ različite točke, te $f : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorfna.

Tada je
$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \nu(\gamma, z_j)\operatorname{res}(f, z_j)$$
za svaki PDG zatvoren put $\gamma : [a,b] \to \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$.

Dokaz. Za svaki $j = 1, \dots, k$ odaberemo $r_j > 0$ tako da je $K(z_j, r_j)$ sadržan u Ω, ne siječe γ (tj. $K(z_j, r_j) \subseteq \Omega \setminus \gamma([a,b])$), i ne sadrži niti jedan z_i osim z_j.

(To je moguće, jer je $\Omega \setminus (\gamma([a,b]) \cup \{z_1, \dots, z_k\})$ otvoren skup.)

Kako je f holomorfna na $K^*(z_j, r_j)$, možemo ju razviti u Laurentov razvoj oko z_j :
$$f = f_j^{reg} + f_j^{sing}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Pritom je f_j^{reg} holomorfna na $K(z_j, r_j)$ i f_j^{sing} holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$.

Definiramo
$$F : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{k} f_j^{sing}(z).$$

F je holomorfna na $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$, ali i u $z_1, \dots, z_k$ jer je
$$F(z) = f(z) - f_i^{sing}(z) - \sum_{j \neq i} f_j^{sing}(z) = f_i^{reg}(z) - \sum_{j \neq i} f_j^{sing}(z),$$
a $f_i^{reg}(z)$ i sve $f_j^{sing}(z)$ za $j \neq i$ su holomorfne u z_i.

Dakle, $F \in H(\Omega)$. Sada Cauchyjev teorem za holomorne funkcije na zvjezdastom skupu povlači
$$\int_\gamma F(z)dz = 0.$$
Odatle je
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_\gamma f_j^{sing}(z)dz. \tag{2}$$

Nadalje,
$$\begin{aligned}
\int_\gamma f_j^{sing}(z)dz &= \int_\gamma \left(\frac{a_{-1}}{z - z_j} + \frac{a_{-2}}{(z - z_j)^2} + \dots \right) dz \\
&= \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z - z_j} dz + \int_\gamma \frac{a_{-2}}{(z - z_j)^2} dz + \dots
\end{aligned}$$

Kako $z \mapsto \frac{1}{(z-z_j)^m}$ ima primitivnu funkciju na $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ za $m \geq 2$, vidimo da je
$$\int_\gamma f_j^{sing}(z)dz = \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z - z_j} dz =$$
$$2\pi i a_{-1} \nu(\gamma, z_j) = 2\pi i \, \nu(\gamma, z_j)\operatorname{res}(f, z_j).$$

Tvrdnja teorema slijedi uvrštavanjem u (2). □

Korolar. Uz pretpostavke Teorema o reziduumima, pretpostavimo još i da je γ kontura, te da su $z_1, \ldots, z_m$ singulariteti od f unutar γ.

Tada je

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(f, z_j).$$

Dokaz. Slijedi iz Teorema o reziduumima i činjenice da je $\nu(\gamma, z_j) = 1$ za z_j unutar γ, a $\nu(\gamma, z_j) = 0$ za z_j izvan γ. $\square$